Matritzen I

Menge der (m×n)-Matritzen in $\mathbb{K}$:

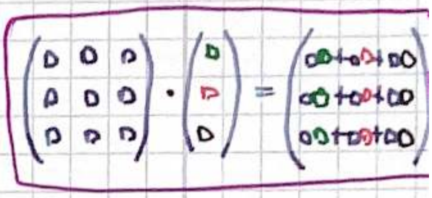
$$\boxed{M_{m,n}(\mathbb{K})} \mathrel{\hat=} \boxed{Mat(m,n,\mathbb{K})} \mathrel{\hat=} \boxed{\mathbb{K}^{m\times n}}$$

Zeilen zuerst (m × n) Spalten später

A Matrix-Vektor-Multiplikation

$\boxed{A \in M_{m,n}(\mathbb{R})}$, $\boxed{v \in \mathbb{R}^n}$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot v_1 + a_{12}\cdot v_2 + \dots + a_{1n} v_n \\ a_{21}\cdot v_1 + a_{22}\cdot v_2 + \dots + a_{2n} v_n \\ \dots \\ a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 + \dots + a_{mn} v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$



z.B.: LGS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{A \cdot x = b}$$

im Bild von $\varphi_A(x)$

v, w Spaltenvektoren im $\mathbb{R}^n$, λ, μ Skalare

$$\boxed{A \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda A \cdot v + \mu A \cdot w}$$

→ $\boxed{v \mapsto A \cdot v}$ ist linear

vgl. „Integral ist linear" (Integration I)

homogenes Gleichungssystem: $\boxed{A \cdot x = \underline{0}}$ ← Kern

→ immer eine Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ → triviale Lösung

$\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum

inhomogenes GS: $\boxed{A \cdot x \neq \underline{0}}$ → nicht immer eine Lösung

$\boxed{A \cdot x = b}$ → x eine Lösung

↳ $\boxed{L = \{x + y \mid y \in K\}}$ → alle Lösungen

nimm

$\boxed{A \cdot x = 0}$ → K Lösungsmenge

Matrizen II

$\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ v \mapsto A \cdot v$ (v ist Vektor)

$\boxed{\dim \text{Bild}(A) = \text{rang}(A)}$ **Rang** der Matrix A

$\boxed{\ker(A) = \varphi_A^{-1}(\underline{0}_m)}$ **Kern** der Matrix
(Untervektorraum, der die 0 erzeugt)
(Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$)

für jede $\boxed{A \in M_{m,n}(\mathbb{R}^n)}$ gilt:

$$\boxed{\text{rang}(A) + \dim \ker(A) = n}$$

$\boxed{\ker(A) = \{\underline{0}\} \iff \varphi_A \text{ injektiv}}$

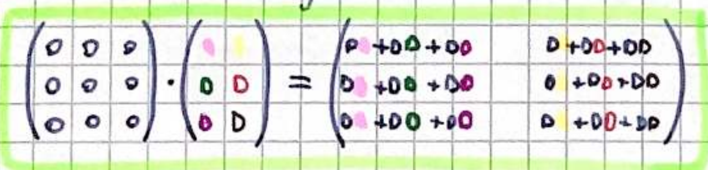
$n > m \Rightarrow \varphi_A$ nicht injektiv

[Eine Matrix (A) ist eine Abbildung (φ_A) $A \cdot x = b$]
Vektor

quadratische Matrizen sind kein Körper!
z.B. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Matrix-Multiplikation

[„Denk die zweite Matrix als Vektoren und jede Spalte im Ergebnis ist das Ergebnis der Multiplikation mit jedem von ihnen"]



! $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

$$\boxed{\begin{aligned} &A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \\ &A \cdot (B + D) = A \cdot B + A \cdot D \\ &\lambda \cdot A \cdot B = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) \end{aligned}}$$

Matrizen III

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $\ker(A) = \{0_n\}$

$\Rightarrow \varphi_A$ bijektiv

$\Rightarrow \varphi_A^{-1}$ existiert und ist auch linear

$\Rightarrow A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ existiert mit $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n = A^{-1} \cdot A$

B ist Inverse von A, wenn $A \cdot b_1 = e_1,\ A \cdot b_2 = e_2, \dots A \cdot b_n = e_n$
($b_1, b_2, \dots b_n$ Spalten von B) $\Rightarrow A \cdot B = \mathbb{1}$

invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$

oder: wenn $\text{rang} = n$

nur quadratische!

→ LGS

⇒ Löse mit Gauß $(A | e_n)$

hier muss $\mathbb{1}_n$ stehen

$(A \mid \mathbb{1}_n)$ → simultane Umformung

hier wird A^{-1} stehen

$A = (◥) \Rightarrow A^{-1} = (◥)$

$A = (◣) \Rightarrow A^{-1} = (◣)$ $(A \neq A^{-1})$

(Dreiecksmatrizen)
($a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$)

$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\boxed{ad - bc \neq 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

sonst $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ u. $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ linear abhängig
⇒ φ_A nicht surjektiv

Determinante: Faktor, mit dem die Fläche (Volumen) verändert wird (3D / 2D) bei der Anwendung der Matrix als Transformation

$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

$D = \begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det(D) = d_{11} \cdot \ldots \cdot d_{nn}$
(Dreiecksmatrix)

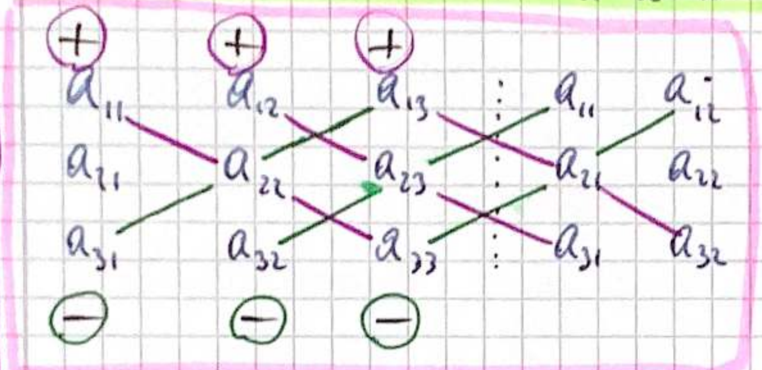
- Zeile $\cdot \lambda$ → $\det \cdot \lambda$
- Zeile + Zeile → ✗ nichts
- Zeilen vertauschen → $\det \cdot (-1)$

Matrizen IV

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

Regel von Sarrus:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$



Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x^T \cdot y$$

$$\langle x, Ay \rangle = x^T \cdot A \cdot y = (A^T \cdot x)^T \cdot y = \langle A^T \cdot x, y \rangle$$

$A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$A \neq 0 \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

bei **Blockmatrizen**:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$$

Laplace-Entwicklung

i-te Zeile u. j-te Spalte gestrichen

i-te Zeile: $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

j-te Spalte: $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

für quadratische:

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$

$\det(A) = \det(A^T)$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Transponierte Matrix A^T: Zeilen u. Spalten vertauscht

$(A^T)^T = A$ $\quad (A+B)^T = A^T + B^T$

$(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$ $\quad (A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$

Lineare Gleichungssysteme

gegeben a_{ij}, b_i, gesucht x_n, die gleichzeitig

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \qquad \dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

LGS

$\Rightarrow$ Gauß-Algorithmus

$\mathbb{L}$ besteht aus n-Tupeln $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3+5x_3 \\ 1-2x_3 \\ x_3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ (quadratisch), $b \in \mathbb{R}^n$. $A \cdot x = b$

- genau eine Lösung
- $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = n$
- $\Leftrightarrow$ $\ker(A) = \underline{0}$
- $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A invertierbar

Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ von $A \cdot x = b$ ist

$$\boxed{x_k = \frac{\det(A_{k|b})}{\det(A)}}$$

k-te Spalte durch b ersetzen

(Cramersche Regel)

BRUNNEN